

# Risikomodellierung im Standardmodell



**QX-CLUB BERLIN**  
**DR. PETER TAKÁCS**  
**DR. ROLF MERTIG**

**7. MAI 2012**  
**(CONSINTO GMBH)**  
**(GLUONVISION GMBH)**

# Themen

2

## Theorie

- Risikomodellierung

### Begriffe und Verfahren

- ✦ Risikomaß und –verteilung
- ✦ Abhängigkeitsstrukturen
- ✦ Risikoaggregation

- Standardmodell

### Vorgaben durch Solvency II

- ✦ Solvenzbilanz
- ✦ Risikokategorien und Teilrisiken
- ✦ Risikobewertung
- ✦ Stärken/Schwächen

- Weiterentwicklungen mit stochastischer Simulation

Aktuelle Verfahren im Überblick

## Praxis

- aktuarielle Unterstützung

### Mathematica®

- ✦ Kurzvorstellung
- ✦ Anwendungsbeispiel
- ✦ Projektentwicklung

- aktuarieller Arbeitsplatz

### Nutzungsmöglichkeiten

- ✦ Ergänzung zu Prophet
- ✦ Bestandsverdichtung
- ✦ MCEV
- ✦ ...

- aktuarielles Projekt

Stochastisches  
Unternehmensmodell

# Risikomodellierung

3

- **Risikobegriff**

Entscheidung zum Verhalten  
Meist unbekanntes Ergebnis

Erwartetes Ergebnis  
Abweichungen von der  
Erwartung

- Mögliches Eintreten eines Ereignisses in der Zukunft mit negativer Auswirkung

Vielzahl von Möglichkeiten  
Zufallsgröße  
Wahrscheinlichkeitsverteilung  
Erwartungswert  
Varianz,  
Standardabweichung,  
Variationskoeffizient

} **Risiko**

# Risikomodellierung

4

- Bivariate (standardisierte) Normalverteilung

## Symmetrisch

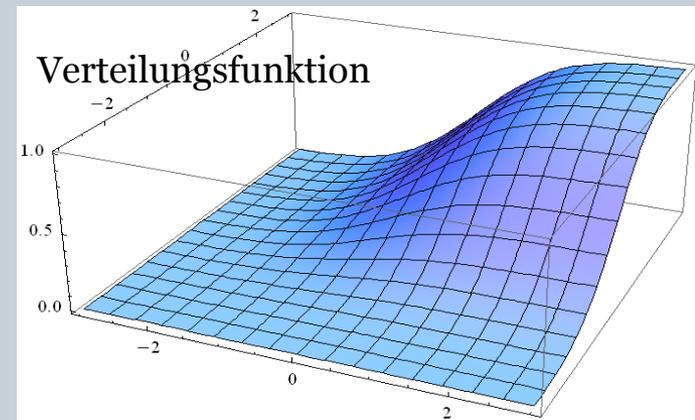
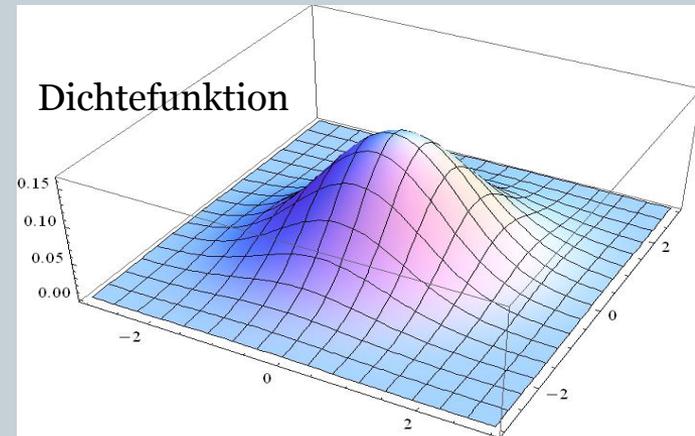
- ✦ Finanz-, Versicherungsdaten eher schief

## Korrelationsstruktur

- ✦ Annahmen treffen

## flach auslaufende Ränder

- ✦ Kaum Extremwerte
- ✦ Gleichzeitige gemeinsame Extremwerte noch seltener
- ✦ Geringe Abhängigkeiten am Rand



# Risikomodellierung

5

- Risikomaße

Varianz

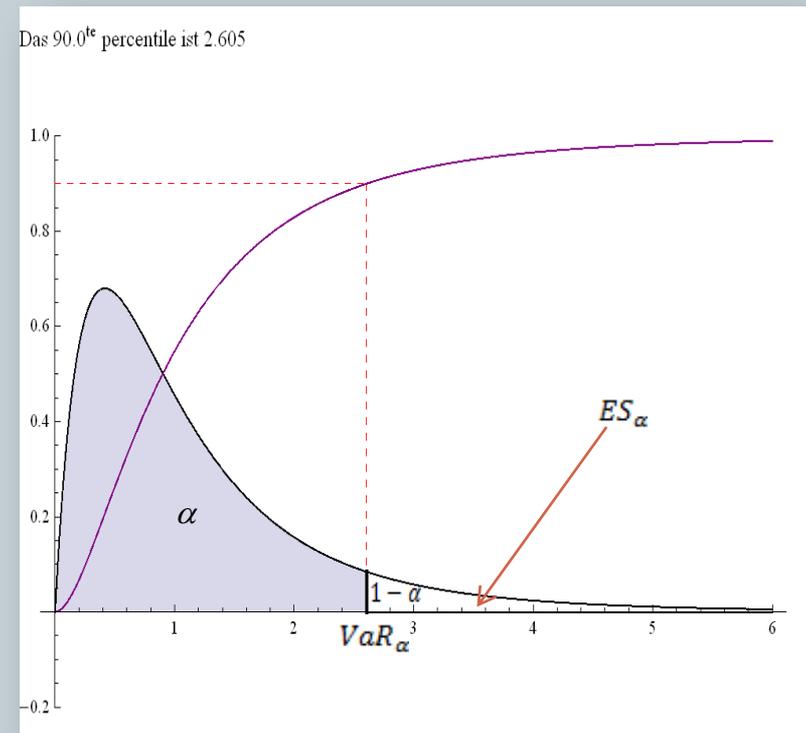
$$\text{Var}(X) := E((X - E(X))^2)$$

Value at Risk (VaR)

$$\begin{aligned} \text{VaR}_\alpha(X) &:= F_X^{-1}(\alpha) \\ &= \inf\{x \in R, F_X(x) \geq \alpha\} \end{aligned}$$

Expected Shortfall (TVaR, CVaR)

$$\text{ES}_\alpha(X) := E(X | X \geq \text{VaR}_\alpha(X))$$

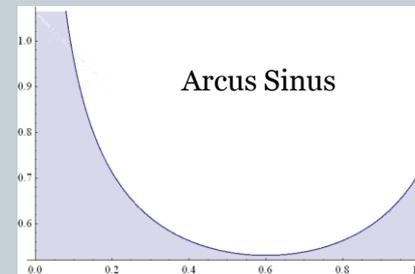
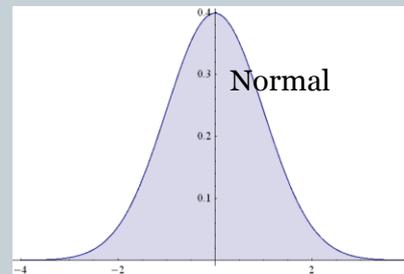
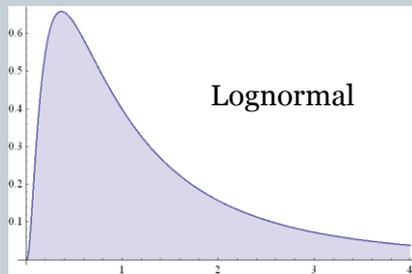


# Risikomodellierung

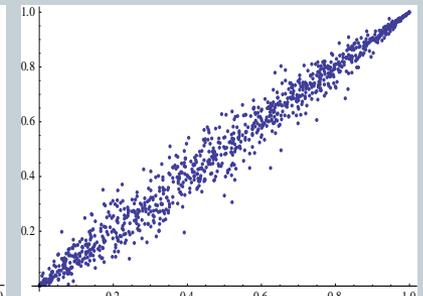
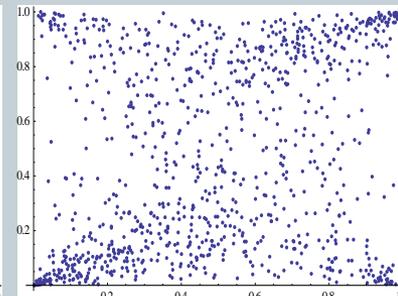
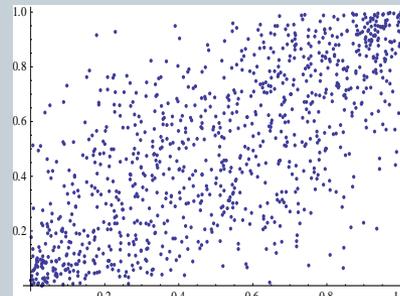
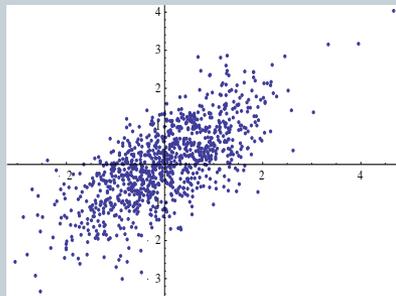
6

- **Abhängigkeitsstrukturen**

Verteilung der Einzelrisiken ???



Abhängigkeit der Risiken untereinander ???



# Risikomodellierung

7

- **Copulas**

Verteilungsfunktion eines Zufallsvektors mit uniformen Randverteilungen

Zerlegung der multivariaten Verteilung in Abhängigkeitsstruktur und univariate Randverteilungen

Unabhängig von der Verteilung der Einzelrisiken

Eindeutigkeit der Abhängigkeitsstruktur der Einzelrisiken bei stetigen Randverteilungen (Theorem von Sklar)

berechenbares Maß für die Abhängigkeit an den Rändern

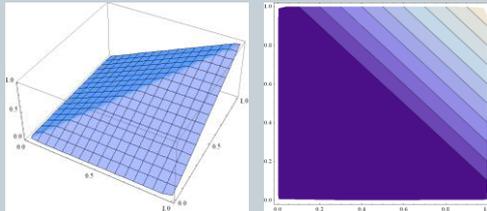
# Risikomodellierung

8

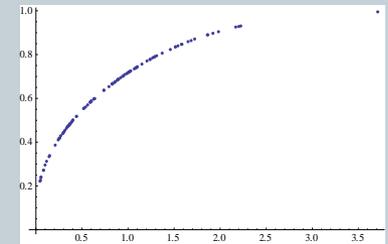
- Copulas

## Fréchet-Hoeffding-Schranken

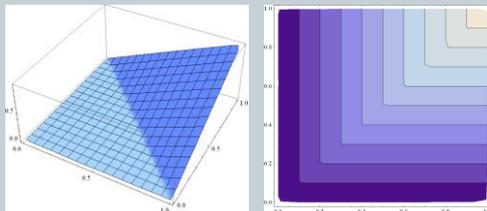
obere Schranke



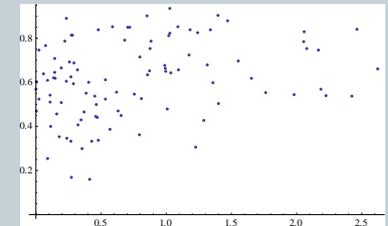
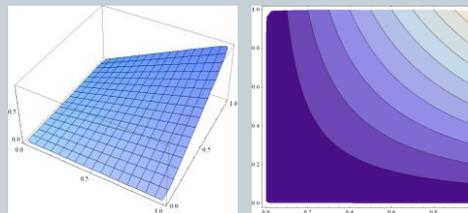
Komonoton



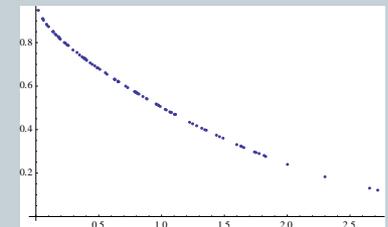
untere Schranke



unabhängig



Kontramonoton



# Risikomodellierung

9

- Risikoaggregation

$$X := \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix} \sim N(\mu, \Sigma) = \left( \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{Var}(X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) & \dots & \text{Cov}(X_1, X_n) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \text{Var}(X_2) & \dots & \text{Cov}(X_2, X_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{Cov}(X_n, X_1) & \text{Cov}(X_n, X_2) & \dots & \text{Var}(X_n) \end{pmatrix} \right)$$

$$SCR_i := k_\alpha \sqrt{\text{Var}(X_i)} \quad \text{Solvency Capital Required}$$

$$\begin{aligned} SCR_{\text{Gesamt}} &:= k_\alpha \sqrt{\text{Var}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)} && \text{(Wurzelformel)} \\ &= k_\alpha \sqrt{\text{Var}(1'X)} = k_\alpha \sqrt{1'\Sigma 1} \end{aligned}$$

$k_\alpha$  – geeignet gewählt

# Risikomodellierung

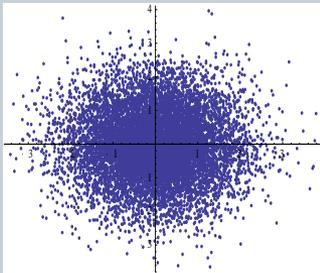
10

- Risikoaggregation

$$X \sim N(0,1)$$

$$Y \sim N(0,1)$$

$$\text{Cov}(X, Y) = 0$$



*unkorreliert, unabhängig*

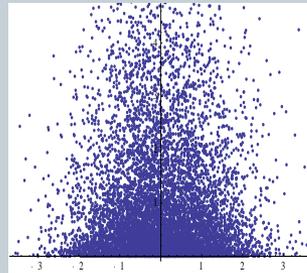
$$\mu_X \approx 0 \quad \sigma_X \approx 1$$

$$\mu_Y \approx 0 \quad \sigma_Y \approx 1$$

$$\text{SCR} = 3.64$$

$$X \sim N(0,1)$$

$$Y = X^2$$



*unkorreliert, abhängig*

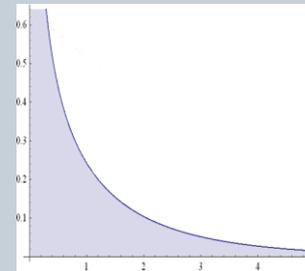
$$\mu_X \approx 0 \quad \sigma_X \approx 1$$

$$\mu_Y \approx 1 \quad \sigma_Y \approx \sqrt{2}$$

$$\text{SCR} = 5.77$$

Verteilung bekannt

$$Y = X^2 \sim \chi^2(1)$$



$$\mu_Y = 1 \quad \sigma_Y = \sqrt{2}$$

$$\text{SCR} = 9.064$$

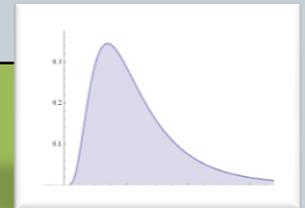
# Standardmodell

11

## Stochastische Modellierung der ökonomischen Bilanz im 1-Jahres-Horizont

Ökonomische Bewertung der vorhandenen Eigenmittel  
Solvenzkapital, max. Verlust an Eigenmitteln, der mit bestimmter Wahrscheinlichkeit nicht überschritten wird  
Unbekannte Verteilung der ökonomischen Eigenmittel

## Solvency II Bilanz



# Standardmodell

12

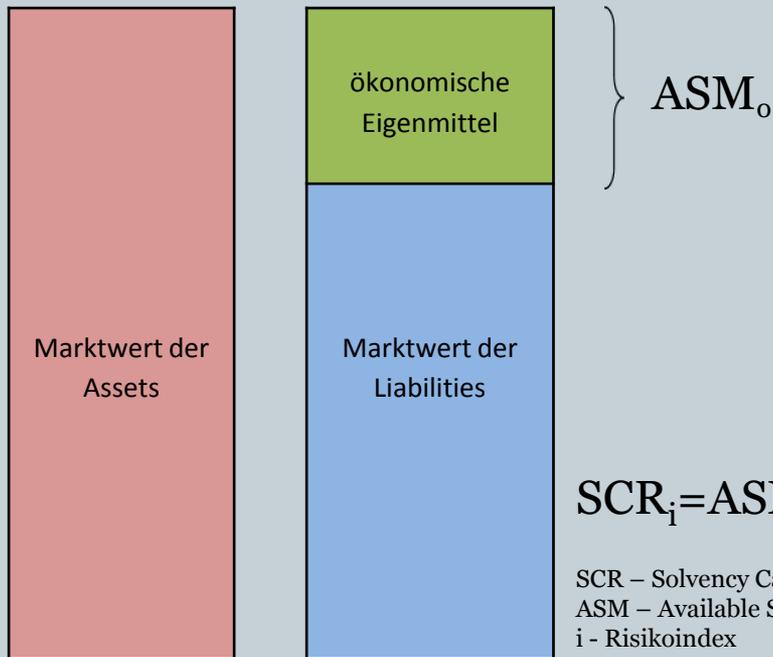
- Bewertung der Verbindlichkeiten mit Best-Estimate zuzüglich Risikomarge
- Bewertung der Kapitalanlagen mit Marktwerten
- Risikokategorien mit Teilrisiken sind definiert
  - versicherungstechnisches Risiko (Health, Life, Non-Life)
  - Marktrisiko (Zins-, Aktien-, Immobilien-, Wechselkursrisiko, ...)
  - operationelles Risiko
- Solvenzkapitalbestimmung mittels faktorbasierten Ansatz oder Szenariorechnungen
- Korrelationen beim Übergang zum Gesamtrisiko
- Doppelte Bestimmung der ökonomischen Bilanz ersetzt stochastische Modellierung

# Standardmodell

13

## Solvency II Bilanz

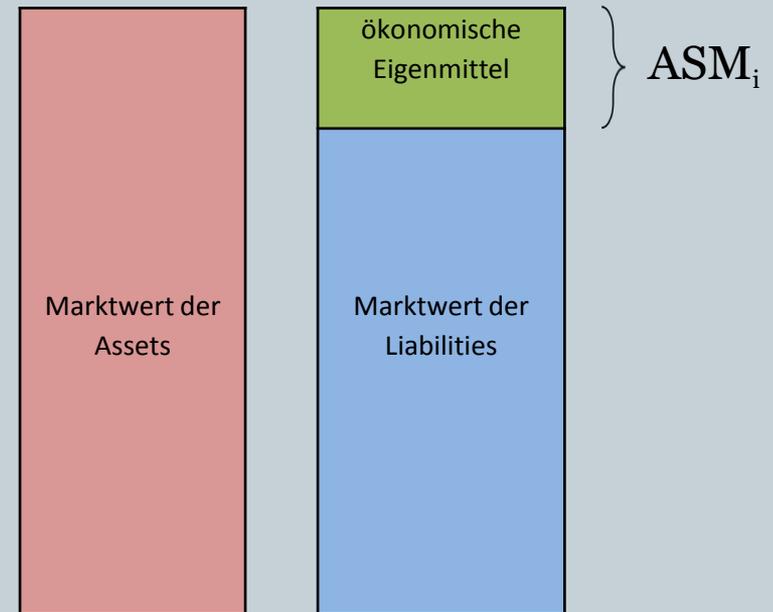
### Ausgangsbilanz



$$SCR_i = ASM_0 - ASM_i$$

SCR – Solvency Capital Requirement  
ASM – Available Solvency Margin  
i - Risikoindex

### „gestresste“ Bilanz (z.B. Aktien fallen um x%)



# Standardmodell

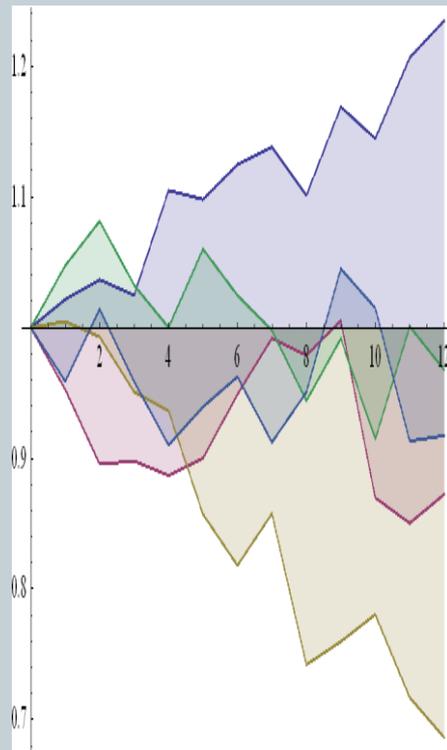
14

- Europaweit standardisiert
- Anwendbarkeits- und Wirkungsstudien auf europäischer Ebene: „Quantitative Impact Studies“ (QIS 1 bis QIS 5 ( QIS 6 (GDV) )
- Keine stochastischen Simulationen erforderlich
- Problematisch
  - quantifizierbarkeit der Risiken
    - ✦ implizite Normalverteilungsannahme
    - ✦ VaR ist kein kohärentes Risikomaß
    - ✦ Abhängigkeitsstruktur
    - ✦ Korrelationsmatrizen
  - Überschätzung SCR
  - Vergleichbarkeit zwischen Unternehmen
- Weiterentwicklung zum (partiellen) internen Modell

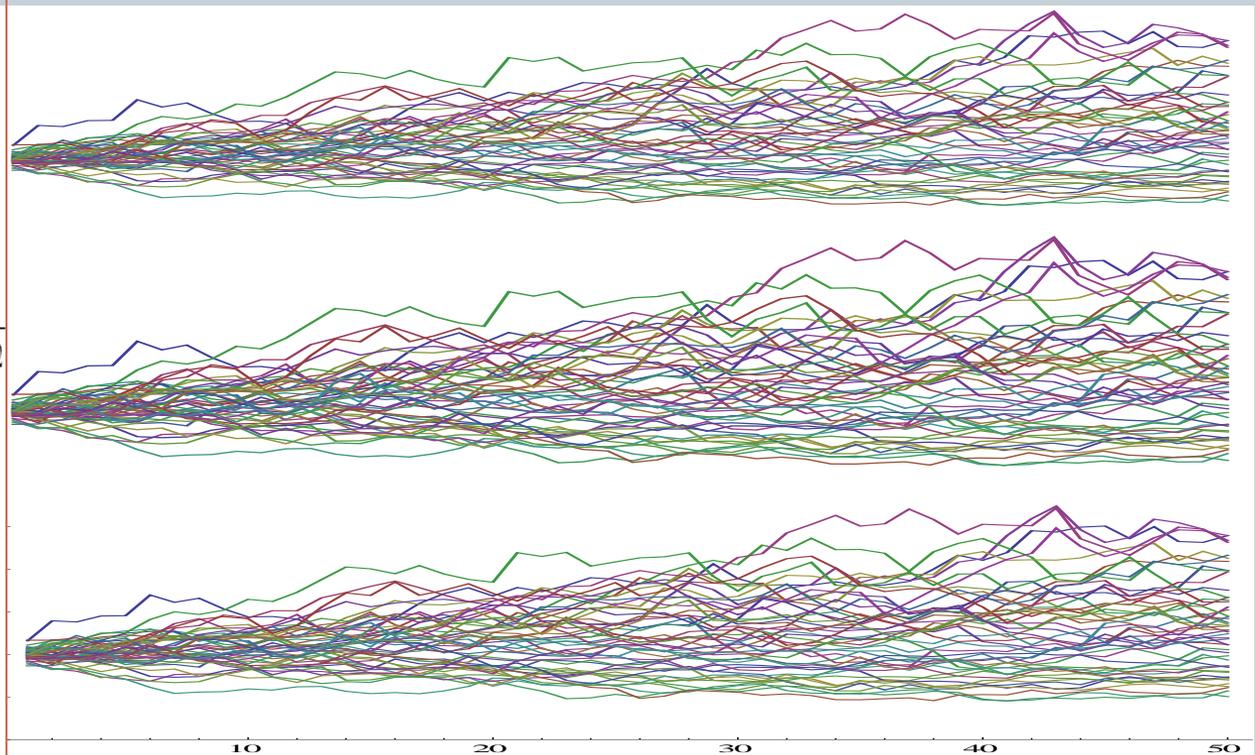
# Weiterentwicklungen mit stochastischer Simulation

15

Szenarien  
Risikofaktoren



Risikoaggregation mit Bewertungsmodell



# Weiterentwicklungen mit stochastischer Simulation

16

- Aktuelle Verfahren im Überblick

## Curve Fitting

- ✦ Bewertungsmodell: parametrisierbare Funktion

## Least Square Monte Carlo

- ✦ Bewertungsmodell: parametrisierbare Funktion

## Replicating Portfolio

- ✦ Bewertungsmodell: Portfolio aus Kapitalanlagen
- ✦ Keine inneren Simulationen
- ✦ Kalibrierung über Aktionärs-cashflow
- ✦ Inkrementeller Aufbau des Portfolios

# aktuarielle Unterstützung

17

- Mathematica<sup>®</sup> für das Aktuariat

The screenshot displays the 'Solutions' page on the Wolfram website. The browser window shows the URL 'www.wolfram.com/solutions/'. The page is organized into several sections:

- Industry:** A header section stating '100% of the Fortune 50 companies rely on Mathematica to maintain their competitive edge in innovation.' Below this are three sub-sections:
  - Engineering:** Aerospace Engineering and Defense, Chemical Engineering, Control Systems, Electrical Engineering, Image Processing, Industrial Engineering, Materials Science, Mechanical Engineering, Operations Research, Optics, and Petroleum Engineering.
  - Biotechnology and Medicine:** Bioinformatics and Medical Imaging.
  - Software Engineering, Application Development, and Content Delivery:** Authoring and Publishing, and Interface Development.
- Finance, Statistics, and Business Analysis:** Actuarial Sciences, Data Analysis and Mining, Econometrics, Economics, Financial Engineering and Mathematics, Financial Risk Management, and Statistics.
- Science:** Astronomy, Biological Sciences, Chemistry, Environmental Sciences, Geosciences, and Social and Behavioral Sciences.

A note at the bottom of the industry section reads: 'Can't find your field? More industry pages are coming soon.' with a 'Suggest a field' input box.

- Education:** A header section stating 'Millions of educators, researchers, and students worldwide use Mathematica.' Below this are three sub-sections:
- For Faculty and Staff:** Higher Education (Find out why Mathematica is ideal for education and research), Community and Technical College Education (Create engaging and interactive courses to prepare your students for university-level classes and real-world careers), and Primary and Secondary Education (See how Mathematica can make your math and science classrooms come alive).
- For All Students:** Students (Boost your education with Wolfram resources and products designed and priced for students).
- Technology:** High-Performance and Parallel Computing (HPC).

The browser's taskbar at the bottom shows two open files: 'CoordinationOfInsur....cdf' and 'CoordinationOfInsur....nb', along with a download button labeled 'Alle Downloads anzeigen...'.

# aktuarielle Unterstützung

18

- Mathematica<sup>®</sup> für das Aktuariat bietet:

Transparenz und Nachvollziehbarkeit

Interaktive Nutzung am Arbeitsplatz

Geringer Einarbeitungsaufwand

offen, erweiterbar

Vorhandene Anwendungspakete

Dynamisches Modellieren

Schnittstellen zu anderen Programmsystemen

- ✦ Excel

Harmonisierung der individuellen Datenverarbeitung

Batch-Betrieb am Großrechner

Unabhängigkeit von IT-Abteilung

- ✦ Entwicklung und Anwendung

Performance

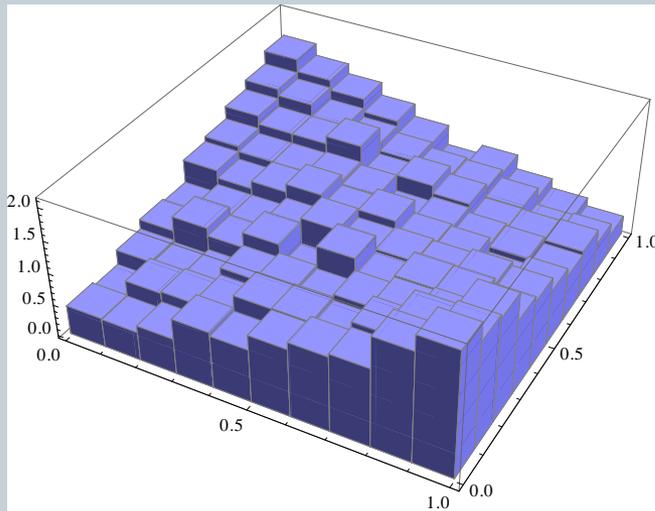
- ✦ Simulationsrechnungen

- Copula – Modelle

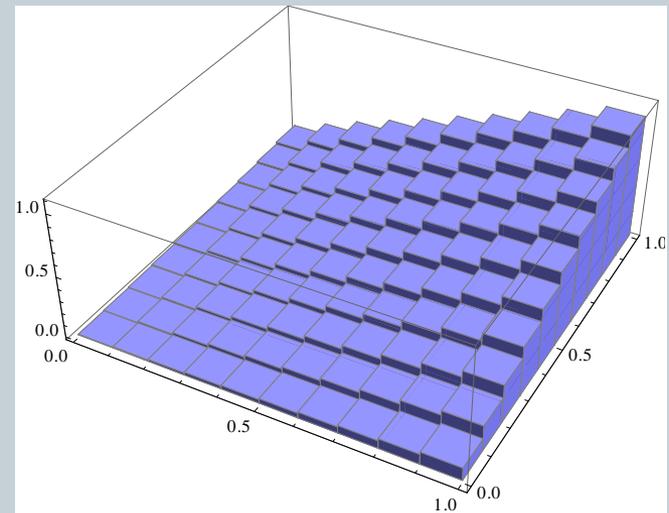
```
D = CopulaDistribution[{"Frank", 6}, {UniformDistribution[{0, 1}], UniformDistribution[{0, 1}]}];
```

```
data = RandomVariate[D, 10^4];
```

```
Histogram3D[data, {{0, 1, 0.1}, {0, 1, 0.1}}, "PDF"]
```



```
Histogram3D[data, {{0, 1, 0.1}, {0, 1, 0.1}}, "CDF"]
```



# aktuarieller Arbeitsplatz

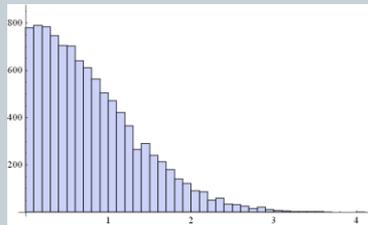
20

## • Copula - Schätzung

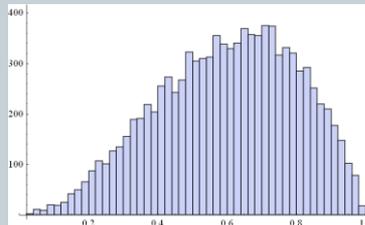
$\{\{63, 71\}, \{61, 65\}, \{137, 57\}, \{25, 43\}, \{158, 91\},$   
 $\{158, 73\}, \{105, 62\}, \{51, 70\}, \{31, 60\}, \{97, 74\}, \dots\}$

### 1. Empirische Randverteilungen

Histogramm[[All,1]]

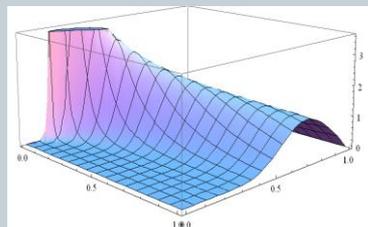


Histogramm[[All,2]]

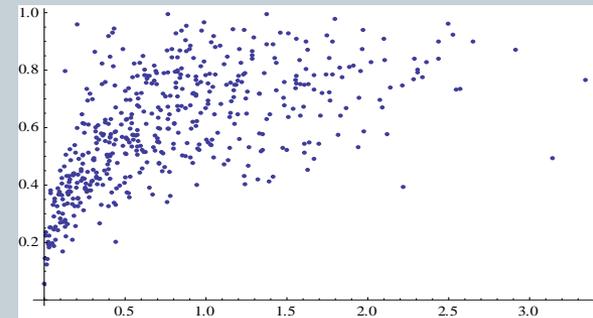
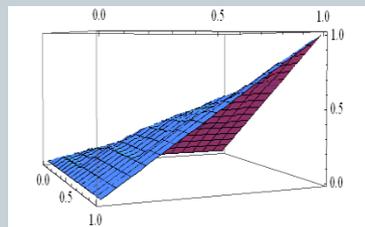


### 2. Gemeinsame Verteilung

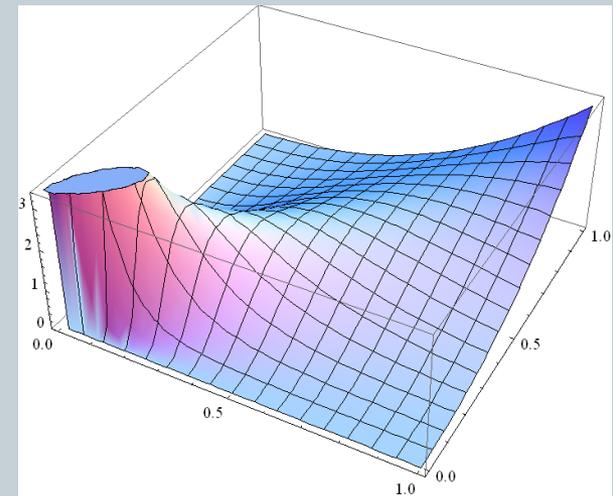
Dichtefunktion



Verteilungsfunktion



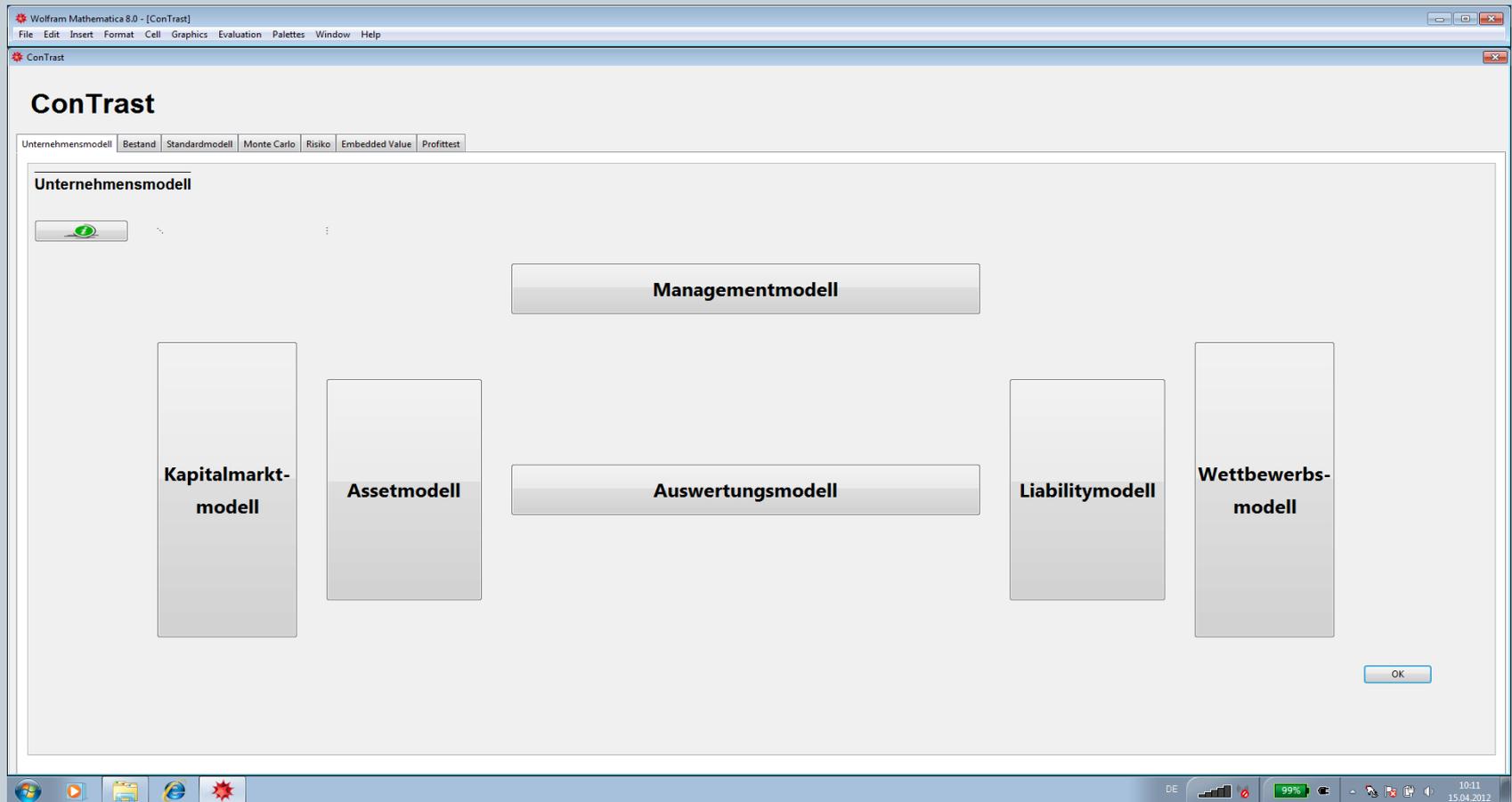
### 3. Copula - Dichte



# aktuarielles Projekt

21

- Beispiel: Stochastisches Unternehmensmodell (Oberfläche )



# aktuarielles Projekt

22

- Beispiel: Input/Output des GDV Standardmodells (entspricht Excel-Modell)

Wolfram Mathematica 8.0 - [Standardmodell]

ConTrast

Unternehmensmodell | Bestand | Standardmodell | Monte Carlo | Risiko | Embedded Value | Profittest

### Standardmodell

Init Standardmodell  
Ergebnisse detailliert  
PDF generieren

Vorhandenes Risikokapital	ASM
Eigenkapital	90 000
Gewinnrücklagen	0
Immaterielle Vermögensgegenstände	30 000
Freie RfB	20 000
SGA-Fonds	30 000
Stille Reserven der Passivseite	60 000
Stille Reserven der Aktivseite	20 000
<b>Summe Risikokapital (ASM)</b>	<b>165 000</b>

Kapitalanlagerisiko (G1)	SCR
Anleihen	4136
Hypotheken	0
<b>Kredit- und Bonitätsrisiko</b>	<b>4136</b>
Marktänderungsrisiko	118175
Währungsrisiko	0
Konzentrationsrisiko	0
<b>Summe Kapitalanlagerisiko (G1)</b>	<b>118 248</b>

Geschäftsrisiko (G2)	SCR
Deckungsrückstellung	1026000
Verdiente Beiträge	400000
<b>Summe Geschäftsrisiko (G2)</b>	<b>24 000</b>

Vt-Risiko (L)	SCR
<b>Hochrechnungsdaten</b>	<b>ConTour AG</b>
Mortality	280
Longevity	503
Disability	0
Lapse	15
Expenses	303
CAT	0
<b>Summe Vt-Risiko (L)</b>	<b>693</b>

Summe SCR	Summe SCR
<b>120 661</b>	<b>120 661</b>
<b>MCR</b>	<b>36 198</b>

ASM = 1.36747  
SCR

#### Standardmodell

Initialisierung Standardmodell

LVU ASM | LVU G1/G2 | LVU G1/G2 | LVU L | BaFin KA1 | BaFin KA2 | BaFin SO

##### Hochrechnungsdatenbank

Eigener Bestand  ConTour AG

##### Bilanzdaten

	Kapital / Risiko	Renten	Berufsunf.	Summe
DK nach HGB	503465.	209588.	20540.	733593.
Ansammlungsguthaben	129732.	22036.	463.	152231.
Beitragsüberträge	10414.	1807.	521.	12742.
RfB	10325.	983.	221.	11529.
Zillmerforderungen	506.	168.	10277.	10951.
ReNa Auffüllkonto	0	0	0	0
Rst. n.abgew. Versf.	3061	1274	125	4460

##### Korrelationen (CEIOPS)

	Mortality	Longevity	Disability	Lapse	Expenses	CAT
Mortality	1					
Longevity	-0.25	1				
Disability	0.25	0	1			
Lapse	0	0.25	0	1		
Expenses	0.25	0.25	0.5	0.5	1	
CAT	0.25	0	0.25	0.25	0.25	1

OK

Windows Taskbar: 10:24 15.04.2012

# Zusammenfassung

23

- Abhängigkeiten zwischen den Einzelrisiken sind zu berücksichtigen; sonst Fehleinschätzung des Gesamtrisikos durch Wurzelformel
- Korrelation als Abhängigkeitsstruktur nicht ausreichend
- Moderne Verfahren mit Stärken und Schwächen
- Copulas als Ansatz zur Modellierung von Abhängigkeiten
- Modellierungswerkzeug Mathematica
- Transparente Modellierung gekoppelt mit performance-optimierten Algorithmen